Références :
Probabilités 2, Jean-Yves Ouvrard

Théorème. *Soit $f : I \times X \mapsto \mathbb{R}$ une application. Supposons que*

(i) pour tout $u \in I$, $x \mapsto f(u,x) \in L^1_{\mathbb{R}}(\mu)$,

(ii) $\mu(dx) - pp, u \mapsto f(u,x)$ est dérivable sur tout l'intervalle I,

(iii) $\mu(dx) - pp$, pour tout $u \in I$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial u}(u,x)\right| \leq g(x) \text{ avec } g \in L^1_{\mathbb{R}}(\mu),$$

alors la fonction $F(u) = \int_X f(u,x)\mu(dx)$ est définie et dérivable sur tout l'intervalle I, de dérivée

$$F'(u) = \int_X \frac{\partial f}{\partial u}(u,x)\mu(dx).$$

Théorème (Levy (admis))**.** *Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. Alors on a*

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}^d, \phi_{X_n}(t) \longrightarrow \phi_X(t).$$

Lemme. *Pour tout $z \in \mathbb{C}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :*

$$\left|\exp(z) - \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n\right| \leq \exp(|z|) - \left(1 + \frac{|z|}{n}\right)^n.$$

On obtient donc que pour tout $z \in \mathbb{C}$

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \exp(z)$$

Démonstration. La formule du binôme de Newton donne, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\exp(z) - \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{z^j}{j!} - \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \frac{z^j}{n^j}.$$

De plus, on a

$$\frac{\binom{n}{j}}{n^j} = \frac{1}{j!}\frac{n(n-1)...(n-(j-1))}{n^j} = \frac{1}{j!}\prod_{k=0}^{j-1}\left(1 - \frac{k}{n}\right)$$

Si on reporte ce résultat dans l'égalité précédente, on obtient

$$\begin{aligned}\exp(z) - \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n &= \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{z^j}{j!} - \sum_{j=0}^{n} \left[\frac{z^j}{j!}\prod_{k=0}^{j-1}\left(1 - \frac{k}{n}\right)\right] \\ &= \sum_{j=n+1}^{+\infty} \frac{z^j}{j!} + \sum_{j=0}^{n} \frac{z^j}{j!}\left[1 - \prod_{k=0}^{j-1}\left(1 - \frac{k}{n}\right)\right].\end{aligned}$$

Or, on sait que $1 - \prod_{k=0}^{j-1}\left(1 - \frac{k}{n}\right) \geq 0$, obtient donc :

$$\left|\exp(z) - \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n\right| \leq \sum_{j=n+1}^{+\infty} \frac{|z|^j}{j!} + \sum_{j=0}^{n} \frac{|z|^j}{j}\left[1 - \prod_{k=0}^{j-1}\left(1 - \frac{k}{n}\right)\right].$$

Nous obtenons donc le résultat avec l'égalité précédemment démontrée appliquée à $|z|$. Enfin, comme $\ln\left(1 + \frac{|z|}{n}\right)^n = |z| + o(1)$, on a que $\lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{|z|}{n}\right)^n = \exp(|z|)$ ce qui entraîne d'après l'inégalité tout juste prouvée que $\lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \exp(z)$. □

Proposition. *Soit X une variable aléatoire. Si X admet un moment d'ordre n alors ϕ_X est de classe $\mathcal{C}^n$ et pour tout $k \in [\![1,n]\!]$ et tout $t \in \mathbb{R}$, on a :*

$$\phi_n^{(k)}(t) = i^k \int_\Omega X^k \exp(itX) d\mathbb{P}$$

Démonstration. On sait que

- Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x \mapsto \exp(itx)$ est $\mathbb{P}_X$-intégrable.
- Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$,

$$\frac{\partial^k}{\partial t^k}\exp(itx) = (ix)^k \exp(itx).$$

On a donc
$$\left|\frac{\partial^k}{\partial t^k}\exp(itx)\right| \leq |x|^k.$$

Par hypothèse, on a que le terme de droite est $\mathbb{P}_X$-intégrable. On a donc en appliquant k fois le théorème de dérivation sous le signe intégrale dépendant d'un paramètre, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\phi_X^{(k)}(t) = i^k \int_\Omega X^k \exp(itX) d\mathbb{P}.$$

En particulier,
$$\phi_X^{(k)}(0) = i^k \mathbb{E}[X^k].$$

□

Lemme. *Si la variable aléatoire réelle X admet un moment d'ordre 2, sa fonction caractéristique ϕ_X admet un développement limité d'ordre 2 en 0 donné par, pour tout $t \in \mathbb{R}$,*

$$\phi_X(t) = 1 + it\mathbb{E}[X] - \frac{t^2}{2}\mathbb{E}[X^2] + o(t^2).$$

Démonstration. D'après la proposition précédente, ϕ est $\mathcal{C}^2$ donc par la formule de Taylor-Young, on a :

$$\begin{aligned}\phi_X(t) &= \phi(0) + t\phi'(0) + \frac{t^2}{2}\phi_X''(0) + o(t^2)\\ &= 1 + it\mathbb{E}[X] - \frac{t^2}{2}\mathbb{E}[X^2] + o(t^2).\end{aligned}$$

□

Théorème. *Soit X_n une suite de variables iid à valeurs dans $\mathbb{R}$ admettant un moment d'ordre 2. Alors*

$$Y_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\left[\sum_{i=1}^n (X_i - \mathbb{E}[X_i])\right] \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, Var(X_1)).$$

Démonstration. Les variables aléatoires X_n sont indépendantes et de même loi, la fonction caractéristique de Y_n est donnée par, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\phi_{Y_n}(t) \overset{\perp}{=} \prod_{i=1}^n \phi_{X_i - \mathbb{E}[X_i]}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \overset{\text{même loi}}{=} \left[\phi_{X_1-\mathbb{E}[X_1]}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right]^n.$$

Le lemme précédent appliquée à la variable aléatoire réelle centrée $X_1 - \mathbb{E}[X_1]$, donne, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\phi_{Y_n}(t) &= \left[1 - \frac{t^2}{2n}\mathbb{E}[(X_1 - \mathbb{E}[X_1])^2] + o\left(\frac{1}{n}\right)\right]^n\\ &= \left[1 - \frac{t^2}{2n}Var(X_1) + o\left(\frac{1}{n}\right)\right]^n\end{aligned}$$

On a montré précédemment que cela implique que

$$\lim_{n\to+\infty} \phi_{Y_n}(t) = \exp\left(-\frac{t^2}{2}Var(X_1)\right).$$

Le terme de gauche correspond à la fonction caractéristique d'une variable aléatoire suivant une loi normale $\mathcal{N}(0, Var(X_1))$. Donc, d'après le théorème de Levy, on obtient :

$$Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, Var(X_1)).$$

□

Leçons possibles : 218